الدالة المولدة لعزوم متغير عشوائي

- نفرض X متغير عشوائي له توزيع احتمالي إما أن يكون متقطع وإما أن يكون مستمر
- ولتكن $g(x)$ دالة بهذا المتغير عندئذٍ نعرف الدالة المولدة لـ $g(x)$ والتي نرمز لها بالرمز

$$M_{g(x)}(t) = E e^{t g(x)} = \begin{cases} \sum_x e^{t \cdot g(x)} p_x(x) , & X \text{ متقطع} \\ \int_{-\infty}^{\infty} e^{t g(x)} f(x) dx , & X \text{ مستمر} \end{cases}$$

وهذه الدالة تكون موجودة إذا كان كل من المجموع موجود والتكامل موجود
حيث t وسيط حقيقي تابع لـ محدود ما"
- في الحالة التي تكون فيها $g(x) = X$ عندئذٍ نحصل على الدالة المولدة لـ X
ومن أهم خصائص هذه الدالة

1) $M_{g(x)}(0) = 1$

2) الدالة المولدة لـ $g(x)$ حيث k ثابت = الدالة المولدة لـ $g(x)$ عن k ; $k = Const$

$$M_{(k \cdot g(x))}(t) = M_{g(x)}(t)$$

$$M_{(k \cdot g(x))}(t) = E \cdot e^{t \cdot k} = M_{g(x)}(k \cdot t)$$

$$M_{(a g(x) + b)}(t) = e^{tb} \cdot M_{g(x)}(at)$$

$$M_{(a g(x) + b)}(t) = E e^{t(a g(x) + b)} = E e^{a t g(x) + bt}$$

$$e^{bt} \cdot E e^{a t g(x)} = e^{bt} M_{g(x)}(at)$$

مشتق r مرة

$$M^{r}_{g(x)}(0) = E g^{r}(x) \; ; \; r \text{ صحيح موجب}$$

$$M'_{g(x)}(t) = \sum_x g(x) \cdot e^{t g(x)} p_x(x) \Rightarrow M'_{g(x)}(0) = \sum_x g(x) \ldots$$
$$= E g(x)$$

المشتقة الثانية:

$$M''_{g(x)}(t) = \sum_x g^2(x) e^{tg(x)} P_x(x) \Rightarrow$$

$$M''_{g(x)}(0) = \sum_x g^2(x) P_x(x) = E g^2(x)$$

وهكذا وبتكملة الاشتقاق مرة بعد مرة نحصل على الاشتقاق من الرتبة r.

$$M^{(r)}_{g(x)}(t) = \sum_x g^r(x) e^{tg(x)} P_x(x) = E g^r(x).$$

* ملاحظة: من المعلوم أن $e^{tg(x)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(tg(x))^k}{k!}$ هو منشور الدالة الأسية

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(t.g(x))^k}{k!} = 1 + \frac{t}{1!} g(x) + \frac{t^2}{2!} g^2(x) + \frac{t^3}{3!} g^3(x) + \cdots$$

وهو منشور $e^{tg(x)}$

لذا فالتوقع الرياضي للطرفين:

$$E e^{t.g(x)} = M_{g(x)}(t) = 1 + \frac{t}{1!} E g(x) + \frac{t^2}{2!} E g^2(x) + \cdots$$

وهو منشور الدالة المولدة لـ $g(x)$

ثم يمثل دالة مولدة.

للتأكد من شكلها: يمكن أن الدالة المولدة من منشورها عند $(0) = 1$

$$M_{g(x)}(0) = 1$$

$$M'_{g(x)}(t) = E g(x) + t E g^2(x) + \cdots$$

$$M'_{g(x)}(0) = E g(x)$$

وهكذا وبتكملة الاشتقاق وتعويض كل $t = 0$ نحصل على التوقع الرياضي لـ ... مما تقدم نستنتج أن منشور الدالة المولدة لـ X يعطى بالشكل:

$$M_x(t) = 1 + \frac{t}{1!} Ex + \frac{t^2}{2!} Ex^2 + \frac{t^3}{3!} Ex^3 + \cdots$$

مثال: أفرض X متغير عشوائي له توزيع احتمالي

$$P_X(x) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^x}{x!} \quad , x = 0, 1, 2, \cdots$$

وهذا التوزيع يدل توزيع بواسون بوسيط $\lambda > 0$

(i) $EX = \lambda = V(x)$

$$2)\ \sigma_x = \sqrt{V(x)} = \sqrt{\lambda}$$

$$z_x = \frac{x - \lambda}{\sqrt{\lambda}}$$

ولنوجد الدالة المولدة للمتغير العشوائي البواسوني:

$$M_x(t) = E\, e^{tx} = \sum_{x=0} e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^x}{x!}$$

λ = وسيط حقيقي

$$\Rightarrow\ = e^{-\lambda} \sum_{x=0}^{\infty} \frac{(\lambda e^t)^x}{x!} = e^{-\lambda} \cdot e^{\lambda \cdot e^t} = e^{-\lambda(1-e^t)}.$$

وهي الدالة المولدة لمتغير عشوائي بواسوني، وسيطه $0 < \lambda$ ونلاحظ

$$E(0) = 1$$

* مثال خامس

أن X متغير عشوائي له توزيع احتمالي معطى بدالة الكثافة الاحتمالية

دالة زوجية $\quad f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \ , x \in R \ ; \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \sqrt{2\pi}$

والمطلوب إيجاد الدالة المولدة لـ X

$$M_x(t) = E e^{tx} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{tx} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{tx - \frac{x^2}{2}} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}(x^2 - 2tx)} dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}(x^2 - 2tx + t^2 - t^2)} dx = \frac{e^{\frac{t^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}(x-t)^2} dx$$

$$M_x(t) = \frac{e^{\frac{t^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{y^2}{2}} dy = \frac{e^{\frac{t^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} \cdot \sqrt{2\pi} = e^{\frac{t^2}{2}}$$

وهي الدالة المولدة [illegible] لمتغير عشوائي [illegible]

1) $M_x(0) = 1$, 2) $M'_x(t) = t \cdot e^{\frac{t^2}{2}} \Rightarrow M'_x(0) = 0 = Ex$

ومنه التوقع الرياضي لمتغير عشوائي طبيعي معياري = 0

$$M''_x(t) = e^{\frac{t^2}{2}} + t^2 \cdot e^{\frac{t^2}{2}} \Rightarrow M''_x(0) = 1 = Ex^2$$ والتباين يساوي الواحد

$$\Rightarrow V(x) = M''_x(0) - (M'_x(0))^2 = Ex^2 - (Ex)^2 = 1 - 0 = 1$$

* الدالة المولدة للعزوم اللامركزية

نفرض x متغير عشوائي له توزيع احتمالي أما b فهو مقدار ثابت وبالتالي $(x - b)$

عندئذٍ بالتعريف الدالة المولدة للعزوم اللامركزية حول النقطة ~~(x - b)~~ b التي نرمز لها

$$M_{(x-b)}(t) = E e^{t(x-b)} = e^{-bt} \cdot E e^{tx} = e^{-bt} M_x(t)$$

على سبيل المثال إذا طلبنا حساب الدالة المولدة للعزوم اللامركزية لمتغير عشوائي

بواسوني وسيطه λ حول النقطة B=2 نكتب مباشرة

$$M_{(x-b)}(t) = 1 + \frac{t}{1!}E(x-b) + \frac{t^2}{2!}E(x-b)^2 + \frac{t^3}{3!}E(x-b)^3 + \dots$$

$$E(x) = M'_{(x-b)}(t) = E(x-b) + t \cdot E(x-b)^2 + \dots$$

عزم ... حول المركز ...

$$M'_{(x-b)}(0) = E(x-b) \quad , \quad M''_{(x-b)}(0) = E(x-b)^2 \dots$$

$$M^{r}_{(x-b)}(0) = E(x-b)^r$$: r صحيح موجب

وبنفس الأسلوب يمكن أن نعرف الدالة المولدة للعزوم المركزية

$$M_{(x-Ex)}(t) = E e^{t(x-Ex)} = e^{-tEx} \cdot E e^{tx} = e^{-tEx} \cdot M_x(t)$$

فعلى سبيل المثال X متغير عشوائي أسي وسيطه $\frac{1}{3}$

أ ب :

$f_x(x) = \frac{1}{3} e^{-\frac{x}{3}} \; ; \; x > 0$

$x = 0$ خلاف ذلك

$Ex = \frac{1}{\lambda} = 3$

$V(x) = \frac{1}{\lambda^2} = 9$

$\sigma_x = 3$

ولنوجد الدالة المولدة للعزوم المركزية لهذا المتغير

$M_{(x-3)}(t) = e^{-3t} \cdot (1-3t)^{-1}$

ولنفرض أن الدالة المولدة لمتغير عشوائي أسي لوسيط λ من كثافة احتمالية سابق :

$f_\lambda(x) = \lambda e^{-\lambda x} \; , \; x > 0$

$= 0$ خلاف ذلك :

$M_x(t) = Ee^{tx} = \lambda \int_0^\infty e^{tx - \lambda x} dx = \lambda \int_0^\infty e^{-(\lambda - t)x} dx \; t$

$= \lambda \left[-\frac{1}{(\lambda - t)} \cdot e^{-(\lambda - t)x} \right]_0^\infty$

$= \frac{\lambda}{\lambda - t} = \frac{1}{1 - \frac{t}{\lambda}} = (1 - \frac{t}{\lambda})^{-1}$

وهي الدالة المولدة لـ أسي وسيط λ

أي : $\lambda = \frac{1}{3}$ مع

* ملاحظة :

$M_{(x-Ex)}(t) = 1 + \frac{t}{1!} E(x - Ex) + \frac{t^2}{2!} E(x - Ex)^2 + \frac{t^3}{3!} E($

$+ \ldots$

فنعود الدالة المولدة للعزوم المركزية ونشتق بالنسبة لـ x.

$M'_{(x-Ex)}(t) = E(x - Ex) + t E(x - Ex)^2 + \ldots$

$\Rightarrow M'_{(x-Ex)}(0) = E(x - \underbrace{Ex}_{ثابت}) = Ex - Ex = 0$

العزم المركزي من الرتبة الأولى دوماً $= 0$

ماذا استخدمنا الدالة المولدة للعزوم المركزية مرة أخرى وعوضنا عن $t=0$ فنجد أن

$$M''_{(x-Ex)}(0) = E(x-Ex)^2 = E\{x^2 - 2x\,Ex + (Ex)^2\} = Ex^2 - 2Ex\cdot Ex + (Ex)^2 = Ex^2 - (Ex)^2$$

$$= V(x)$$

لذا العزم المركزي من المرتبة الثانية يمثل التباين

* تعريف

* تعريف التوزيع الغاماوي :

نقول عن متغير عشوائي x انه يخضع إلى التوزيع الغاماوي بوسيطين الأول λ والثاني α موجبين اذا كانت الدالة الاحتمالية الكثافة معطاة بالشكل:

$$f_x(x) = \frac{\alpha^\lambda}{\Gamma(\lambda)} x^{\lambda-1} \cdot e^{-\alpha x} \quad ; x > 0$$

$$= 0 \quad ; \text{خلاف ذلك}$$

ولنثبت أن هذه الدالة تمثل كثافة دالة احتمال نوجد أن

$$\frac{\alpha^\lambda}{\Gamma(\lambda)} \int_0^\infty x^{\lambda-1} e^{-\alpha x} dx = \frac{\alpha^\lambda}{\Gamma(\lambda)} \int_0^\infty \frac{y^{\lambda-1}}{\alpha^{\lambda-1}} e^{-y} \cdot \frac{dy}{\alpha}$$

$\{\alpha x = y$ وبالتالي $x = \frac{y}{\alpha} \Rightarrow dx = \frac{dy}{\alpha}\}$

$$= \frac{\Gamma(\lambda)}{\Gamma(\lambda)} = 1$$

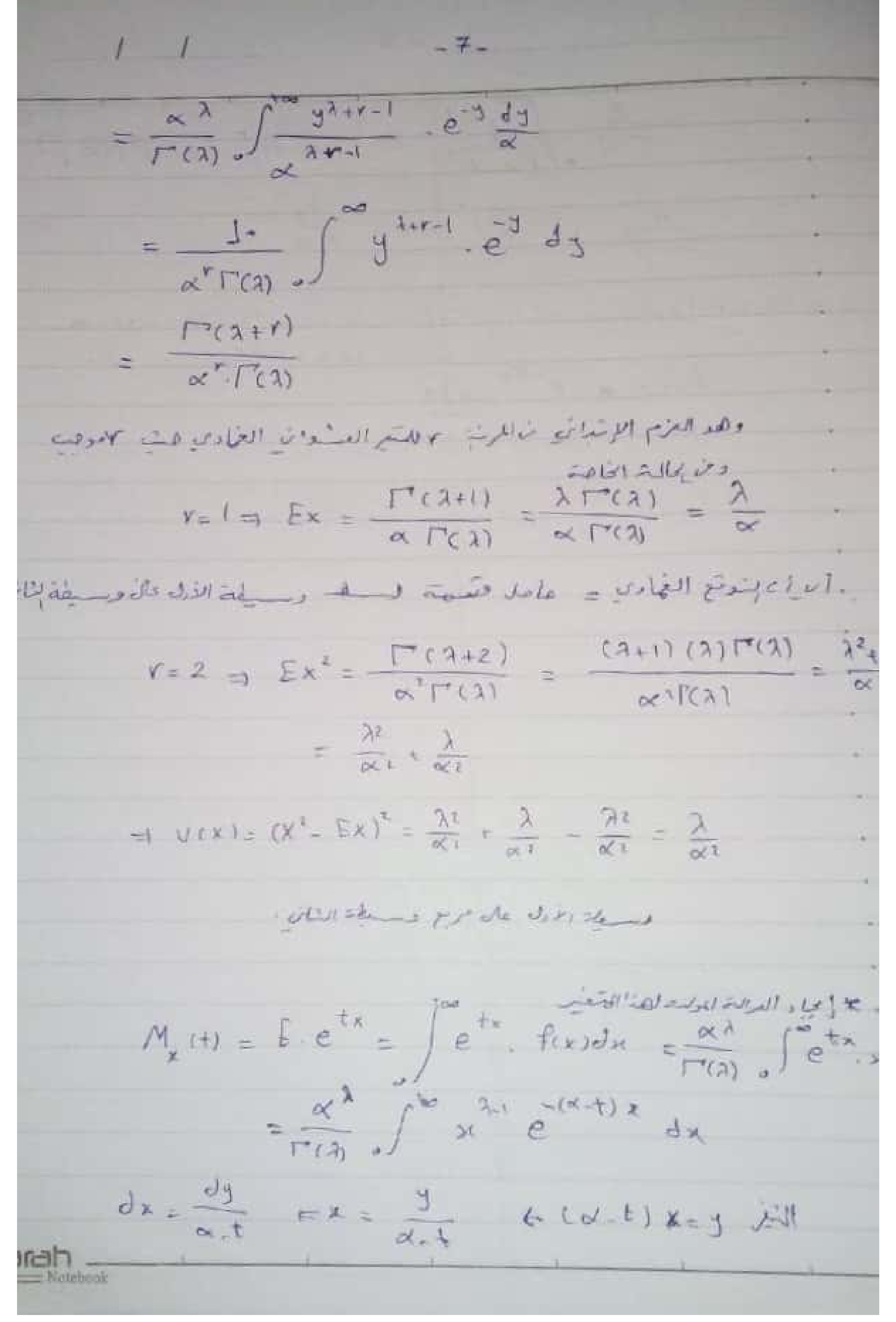
مطلوب: أوجد كل من التوقع والتباين والعزوم الابتدائية من المرتبة r لـ x ومن ثم الدالة المولدة لـ x

الحل:

$$1)\; Ex^r = \int_0^\infty x^r \cdot f(x)\,dx = \frac{\alpha^\lambda}{\Gamma(\lambda)} \int_0^\infty x^r \cdot x^{\lambda-1} \cdot e^{-\alpha x} dx$$

$$= \frac{\alpha^\lambda}{\Gamma(\lambda)} \int_0^\infty x^{\lambda+r-1} \cdot e^{-\alpha x} dx$$

هذا التكامل يجزأ بإجراء التحويل



$$= \frac{\alpha^{\lambda}}{\Gamma(\lambda)} \int_{0}^{\infty} \frac{y^{\lambda+r-1}}{\alpha^{\lambda+r-1}} \cdot e^{-y} \frac{dy}{\alpha}$$

$$= \frac{1}{\alpha^{r}\Gamma(\lambda)} \int_{0}^{\infty} y^{\lambda+r-1} \cdot e^{-y}\, dy$$

$$= \frac{\Gamma(\lambda+r)}{\alpha^{r}\cdot\Gamma(\lambda)}$$

وهذا العزم الابتدائي من الرتبة r للمتغير العشوائي الذي له توزيع كاما

ومن الحالة الخاصة

$$r=1 \Rightarrow Ex = \frac{\Gamma(\lambda+1)}{\alpha\,\Gamma(\lambda)} = \frac{\lambda\,\Gamma(\lambda)}{\alpha\,\Gamma(\lambda)} = \frac{\lambda}{\alpha}$$

أي إن التوقع الرياضي = حاصل قسمة المعلمة الأولى على المعلمة الثانية.

$$r=2 \Rightarrow Ex^{2} = \frac{\Gamma(\lambda+2)}{\alpha^{2}\Gamma(\lambda)} = \frac{(\lambda+1)(\lambda)\Gamma(\lambda)}{\alpha^{2}\Gamma(\lambda)} = \frac{\lambda^{2}+\lambda}{\alpha^{2}}$$

$$= \frac{\lambda^{2}}{\alpha^{2}} + \frac{\lambda}{\alpha^{2}}$$

$$\Rightarrow V(x) = (X^{2} - Ex)^{2} = \frac{\lambda^{2}}{\alpha^{2}} + \frac{\lambda}{\alpha^{2}} - \frac{\lambda^{2}}{\alpha^{2}} = \frac{\lambda}{\alpha^{2}}$$

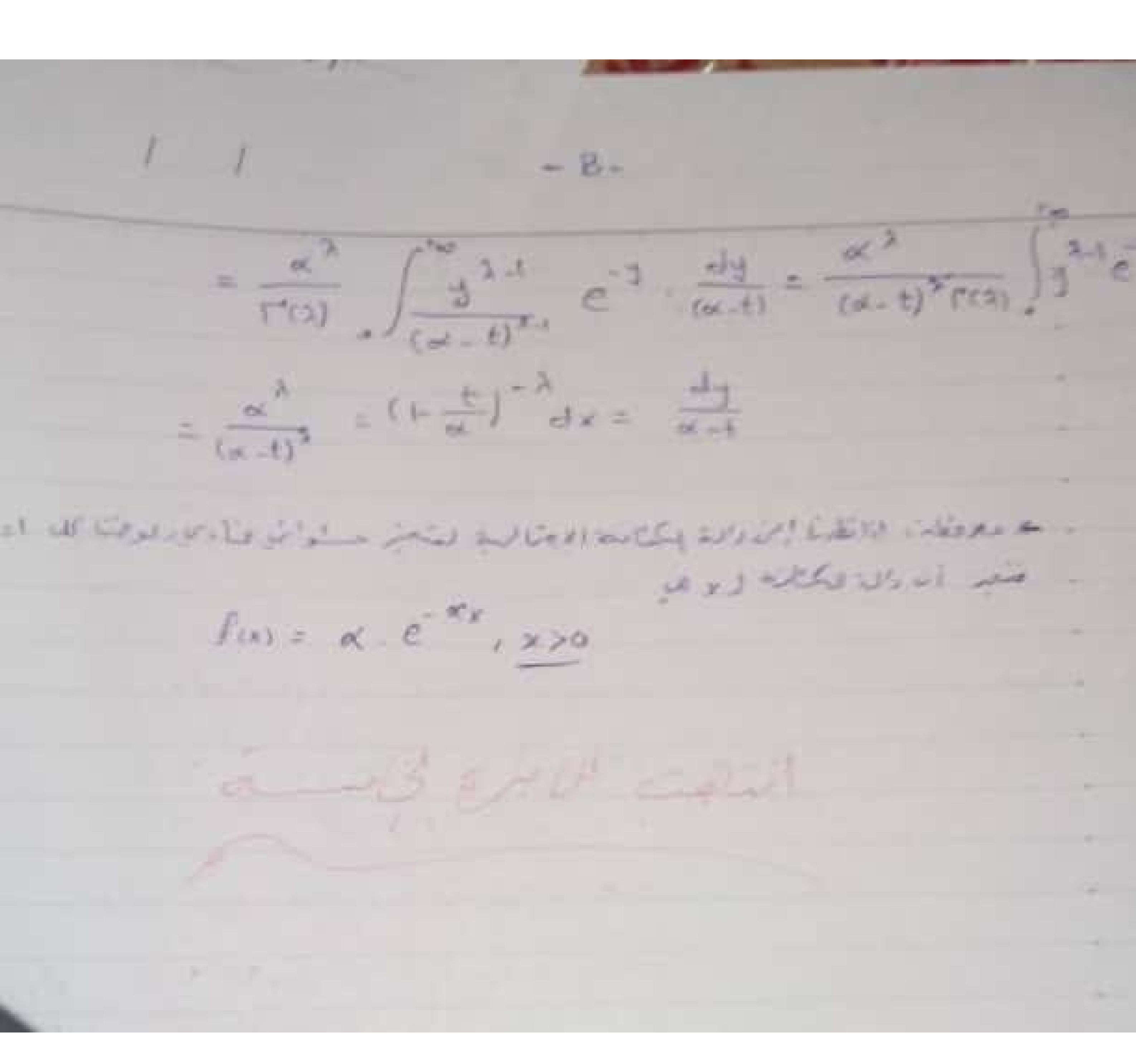
المعلمة الأولى على مربع المعلمة الثانية

* إيجاد الدالة المولدة لهذا المتغير

$$M_{x}(t) = E\, e^{tx} = \int_{0}^{\infty} e^{tx} \cdot f(x)\,dx = \frac{\alpha^{\lambda}}{\Gamma(\lambda)} \int_{0}^{\infty} e^{tx} \cdot x^{\lambda-1} e^{-\alpha x}\,dx$$

$$= \frac{\alpha^{\lambda}}{\Gamma(\lambda)} \int_{0}^{\infty} x^{\lambda-1}\, e^{-(\alpha-t)x}\, dx$$

نفرض $(\alpha-t)x = y \Rightarrow x = \frac{y}{\alpha-t}$ ، $dx = \frac{dy}{\alpha-t}$



$$= \frac{\alpha^{\lambda}}{\Gamma(\lambda)} \int_{0}^{\infty} \frac{y^{\lambda-1}}{(\alpha-t)^{\lambda-1}} e^{-y} \cdot \frac{dy}{(\alpha-t)} = \frac{\alpha^{\lambda}}{(\alpha-t)^{\lambda}\,\Gamma(\lambda)} \int_{0}^{\infty} y^{\lambda-1} e^{-y}$$

$$= \frac{\alpha^{\lambda}}{(\alpha-t)^{\lambda}} = \left(1-\frac{t}{\alpha}\right)^{-\lambda} \qquad dx = \frac{dy}{\alpha-t}$$

ملاحظة : [illegible] دالة الكثافة الاحتمالية لمتغير عشوائي [illegible]

[illegible] دالة الكثافة [illegible]

$$f(x) = \alpha \cdot e^{-\alpha x}, \quad x>0$$

[illegible]